

ОБТЕКАНИЕ ПОДВОДНОГО ПРОФИЛЯ ДВУХСЛОЙНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ С РАЗЛИЧНЫМИ СКОРОСТЯМИ СЛОЕВ

С.И. Филиппов

НИИММ Казанского государственного университета
Sergei.Filippov@ksu.ru

Постановка задачи. Пусть профиль C находится в верхней жидкости глубины H и плотности ρ_1 . Ось ox параллельна невозмущенным границам раздела сред, ось oy направлена вертикально вверх, а начало координат лежит на середине хорды профиля. В системе координат, связанной с профилем, течение плоскопараллельное, установившееся, потенциальное. Скорости потока впереди на бесконечности равны $-V_j$ ($j=1,2$).

Введем области D_j . Область D_1 представляет полосу $h_2 \leq y \leq h_1$ ($h_2 = h_1 - H$) за исключением области, ограниченной контуром C , а D_2 - полуплоскость $y \leq h_2$.

Используя предположения линейной теории волн малой амплитуды, с учетом обозначений

$$W_j^0(z) = V_j W_j(z), \quad m^- = \rho_2 V_2^2 / (\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2),$$

$$m^+ = \rho_1 V_1^2 / (\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2),$$

$$m = m^+ - m^-, \quad v_1 = g/V_1^2, \quad v_2 = g(\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2),$$

где g - ускорение силы тяжести, приходим к следующей задаче. Найти функции $W_j(z)$, аналитические в соответствующих областях D_j и удовлетворяющие условиям:

$$\operatorname{Im} W_1(z) = y + \Psi_0, \quad z \in C \quad (\Psi_0 = \text{const}), \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}[dW_1(z)/dz + iv_1 W_1(z)] = 0, \quad y = h_1, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}[m^+ dW_1(z)/dz - m^- dW_2(z)/dz + iv_2 W_1(z)] = 0, \quad y = h_2, \quad (3)$$

$$\operatorname{Im}[W_1(z) - W_2(z)] = 0, \quad y = h_2, \quad (4)$$

$$|dW_j/dz| \text{ ограничен в } D_j \text{ и стремится к } 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Метод решения задачи заключается в распределении двойных слоев особенностей (диполей) вещественных плотностей $\mu_1(x + ih_1)$ и $\mu_2(x + ih_2)$ по невозмущенному уровню свободной поверхности и линии раздела жидкостей, к потенциалам которых добавляются такие

регулярные вне C функции, что условие (1) на контуре выполняется точно [1,2].

Для бесциркуляционного обтекания профиля C комплексный потенциал будем искать в виде

$$W_{bj}(z) = W_{b\infty}(z) + v_1(z) + v_2(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (6)$$

где $W_{b\infty}(z)$ - комплексный потенциал возмущенного течения при обтекании профиля безграничным потоком,

$$v_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+h_k i}^{\infty+h_k i} \frac{\mu_k(t)}{z-t} dt, \quad \Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+h_k i}^{\infty+h_k i} F_k(z,t) \mu_k(t) dt \quad (k=1,2).$$

Функции $F_k(z,t)$ строятся в параметрической плоскости ζ на основании теоремы Милн-Томсона об окружности [3]:

$$F_k[f(\zeta), f(\tau)] = [\chi_k(\zeta, \tau) + G_k(\zeta, \tau)] / f'(\tau), \quad G_k(\zeta, \tau) = 1 / [\bar{\tau}^2 (\zeta - 1 / \bar{\tau})], \\ \chi_k(\zeta, \tau) = [f(\zeta) - f(\tau) - f'(\tau)(\zeta - \tau)] / (\zeta - \tau) [f(\zeta) - f(\tau)],$$

где $z = f(\zeta)$ - конформное отображение внешности окружности $C^0: |\zeta| = 1$ на внешность профиля, причем $f(\infty) = \infty$, $\zeta_a = -1$ - соответствует задней кромке профиля z_a , $\tau = f^{-1}(t)$.

Плотности распределенных особенностей $\mu_k(t)$ определяются из условий (2), (3) с использованием условия (5) [1]. Окончательно имеем

$$\mu_1(\zeta_1) = \varphi_1(\zeta_1) + \text{Im} \int_{\bar{\tau}_1} L_1(\zeta_1, \tau) \mu_1(\tau) d\tau + \text{Im} \int_{\bar{\tau}_2} L_4(\zeta_1, \tau) \mu_2(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\mu_2(\zeta_2) = \varphi_2(\zeta_2) + \text{Im} \int_{\bar{\tau}_2} L_2(\zeta_2, \tau) \mu_2(\tau) d\tau + \text{Im} \int_{\bar{\tau}_1} L_3(\zeta_2, \tau) \mu_1(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\varphi_1(\zeta_1) = 2 \text{Re} \left[W_{b\infty}(\zeta_1) - 2e^{iv_1 f(\zeta_1)} \int_{\infty}^{\zeta_1} e^{-iv_1 f(v)} W_{b\infty}'(v) dv \right],$$

$$\varphi_2(\zeta_2) = -2 \text{Re} \left[W_{b\infty}(\zeta_2) - 2m^+ e^{iv_2 f(\zeta_2)} \int_{\infty}^{\zeta_2} e^{-iv_2 f(v)} W_{b\infty}'(v) dv \right],$$

$$W_{b\infty}(\zeta) = -(K\zeta + \bar{K}/\zeta) + f(\zeta), \quad K = f'_{\zeta}(\infty),$$

$$L_1(\zeta_1, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ -G_1(\zeta_1, \tau) + \chi_1(\zeta_1, \tau) - \right.$$

$$\left. - 2e^{iv_1 f(\zeta_1)} \int_{\infty}^{\zeta_1} e^{-iv_1 f(v)} [G_1'(v, \tau) + \chi_1'(v, \tau)] dv \right\},$$

$$\begin{aligned}
L_2(\zeta_2, \tau) &= -\frac{1}{\pi} \left\{ -G_2(\zeta_2, \tau) + \chi_2(\zeta_2, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - 2m^+ e^{i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{\infty}^{\zeta_2} e^{-i\nu_2 f(v)} \left[G_2'_{\nu}(v, \tau) + \chi_2'_{\nu}(v, \tau) \right] dv \right\}, \\
L_3(\zeta_2, \tau) &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta_2 - \tau} + G_1(\zeta_2, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - 2m^+ e^{i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{\infty}^{\zeta_2} e^{-i\nu_2 f(v)} \left[\frac{-1}{(v - \tau)^2} + G_1'_{\nu}(v, \tau) \right] dv \right\}, \\
L_4(\zeta_1, \tau) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta_1 - \tau} + G_2(\zeta_1, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - 2e^{i\nu_1 f(\zeta_1)} \int_{\infty}^{\zeta_1} e^{-i\nu_1 f(v)} \left[\frac{-1}{(v - \tau)^2} + G_2'_{\nu}(v, \tau) \right] dv \right\},
\end{aligned}$$

где $T_k: \zeta_k = f^{-1}(x + ih_k)$ - образы невозмущенных границ раздела сред в параметрической плоскости. Отметим, что потенциал в виде (6) удовлетворяет условию (4).

В случае циркуляционного обтекания профиля C комплексный потенциал будем искать в виде

$$W_j(z) = W_{bj}(z) + \gamma W_{\Gamma_j}(z), \quad (9)$$

где W_{bj} рассмотренный в (6) потенциал возмущенного бесциркуляционного течения, $\gamma = \Gamma/V_1$, где Γ - значение циркуляции, $W_{\Gamma_j}(z)$ - кусочно-аналитическая вне C функция, удовлетворяющая условиям (2) - (5) и условиям

$$\operatorname{Im} W_{\Gamma_1}(z) = \Psi_1, z \in C (\Psi_1 = \text{const}),$$

$$\Delta_C W_{\Gamma_1}(z) = 1,$$

где Δ_C - приращение функции при обходе контура C . Функция $W_{\Gamma_j}(z)$ отыскивается в виде, аналогичном (6), где $\mu_k(t)$ нужно заменить на $\mu_{\Gamma_k}(t)$, а $W_{b\infty}(z)$ - на $W_{\Gamma\infty}(z)$.

Для $\mu_{\Gamma_k}(t)$ из условий (2), (3) получается система интегральных уравнений типа (7), (8) с теми же ядрами $L_n (n = 1 + 4)$ и следующими свободными частями:

$$\varphi_{\Gamma_1}(\zeta_1) = \operatorname{Im} \left[\ln \frac{(\zeta_1 - 1/\bar{\zeta}_{\Gamma}) [f(\zeta_1) - f(\zeta_{\Gamma})]}{(\zeta_1 - \zeta_{\Gamma}) [f(\zeta_1) - \bar{f}(\zeta_{\Gamma}) - 2ih_1]} \right] -$$

$$-2e^{i\nu_1 f(\zeta_1)} \int_{\infty}^{\zeta_1} e^{-i\nu_1 f(v)} [1/(v-1/\bar{\zeta}_\Gamma) + f'(v)/[f(v)-f(\zeta_\Gamma)] - 1/(v-\zeta_\Gamma)] dv,$$

$$\varphi_{\Gamma 2}(\zeta_2) = -2 \operatorname{Re} \left[W_{\Gamma \infty}(\zeta_2) - 2m^+ e^{i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{\infty}^{\zeta_2} e^{-i\nu_2 f(v)} W_{\Gamma \infty}'(v) dv \right],$$

$$W_{\Gamma \infty}(\zeta_2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\zeta_2 - 1/\bar{\zeta}_\Gamma}{\zeta_2 - \zeta_\Gamma},$$

где $\zeta_\Gamma = f^{-1}(z_\Gamma)$ и $z_\Gamma \notin D_1 \cup D_2$ — произвольно выбранная точка.

Значение циркуляции γ находится из постулата Жуковского-Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля

$$\gamma = \frac{2\pi \operatorname{Im}(-K + \bar{K}/\zeta_a^2) + \operatorname{Re}[J_1(\zeta_a) + J_2(\zeta_a)]}{\operatorname{Re}[1/(\zeta_a - 1/\bar{\zeta}_\Gamma) - 1/(\zeta_a - \zeta_\Gamma) - J_{\Gamma 1}(\zeta_a) - J_{\Gamma 2}(\zeta_a)]}, \quad (10)$$

$$J_k(\zeta_a) = \int_{T_k} I(\zeta_a, \tau) \mu_k(\tau) d\tau, \quad J_{\Gamma k}(\zeta_a) = \int_{T_k} I(\zeta_a, \tau) \mu_{\Gamma k}(\tau) d\tau,$$

$$I(\zeta_a, \tau) = 1/(\zeta_a - \tau)^2 + 1/[\bar{\tau}(\zeta_a - 1/\bar{\tau})]^2.$$

Для решения систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода (7), (8) применялся метод последовательных приближений. Значение циркуляции вычислялось по формуле (10). Определив из (9) комплексный потенциал, по формуле Чаплыгина

$$X - iY = \frac{\rho_1}{2} \oint_{C^0} \frac{1}{f'(\zeta)} \left[\frac{dW_1^0(\zeta)}{d\zeta} \right]^2 d\zeta - i\rho_1 V_1 \Gamma$$

можно найти подъемную силу Y и волновое сопротивление X .

Для расчета гидродинамических характеристик крылового профиля была разработана программа, тестирование которой проведено на известных решениях других авторов для однослойных и двухслойных потоков и в случае более простых форм тел [2].

В течениях двухслойной жидкости со свободной поверхностью при одинаковой скорости потоков на границах раздела существует два типа волн [4]. Первый тип волн имеет длину волн такую же, как на поверхности однородной жидкости. Амплитуда этих волн значительна на свободной поверхности. Второй тип волн при малой разности плотностей потоков получает значительное развитие на линии раздела жидкостей и существует только при $Fr < Fr^*$, где Fr^* — критическое значение числа Фруда, зависящее от ρ_1/ρ_2 и H .

При разной скорости потоков, проведя исследование, аналогичное [4], можно получить, что на границах раздела также образуется два типа волн. Однако длина волн и первого, и второго типов зависит от

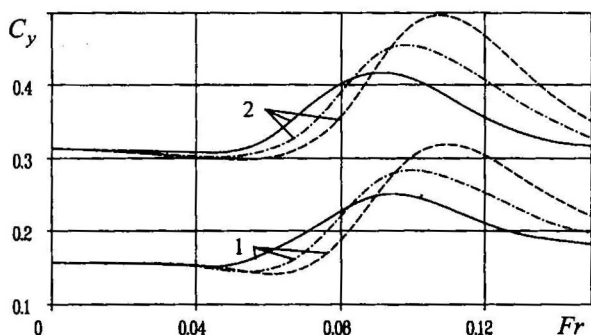


Рис. 1

отношения плотностей и скоростей потоков и толщины верхнего слоя жидкости, но критическое число Фруда совпадает с критическим числом для случая $V_1 = V_2$, т.е. не зависит от отношения скоростей потоков.

На рис. 1, 2 представлены расчеты коэффициента подъемной силы $C_y = 2Y/(\rho_1 V_1^2 L)$ для профиля NACA 66mod в зависимости от числа Фруда $Fr = V_1/\sqrt{gL}$ для углов атаки $\alpha = \{0^\circ, 1^\circ\}$ (кривые 1, 2). Сплошные, штрих-пунктирные и штриховые кривые соответствуют $V_2/V_1 = \{1.3, 1, 0.8\}$ при $H/L = 1$, $h_1/L = 0.5$, $\rho_2/\rho_1 = 1.03$, где $L = 1$ – длина хорды профиля.

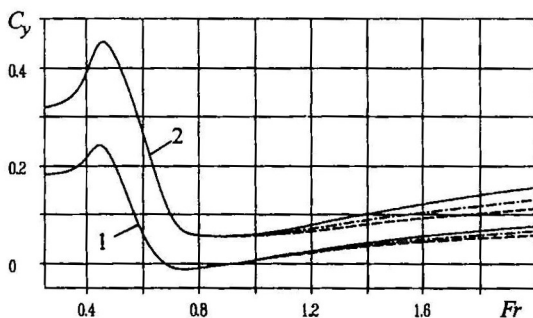


Рис. 2

На рис. 1 представлен интервал малых чисел Фруда $Fr < Fr^*$. Можно отметить, что в данном интервале максимум больше у тех кривых

$C_y(Fr)$, где меньше отношение V_2/V_1 . Влияние различных скоростей потоков в этом интервале очень значительно.

На рис. 2 представлен интервал $Fr > Fr^*$. Здесь выделяются два характерных диапазона. При $Fr^* < Fr < 1$ влияние различных скоростей потоков фактически отсутствует и результаты расчета C_y совпадают с результатами для однородного по скорости и плотности потока, имеющего свободную поверхность. При $Fr > 1$ начинает сказываться многослойность потока. Отметим, что расчет проведен с некоторым отступлением от $Fr^* = 0.1732$, т.к. при приближении к критическому значению числа Фруда резко возрастает время расчета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 99-01-00169, 99-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. *Моделирование границ раздела в задачах обтекания профиля крыла весомой жидкостью* // ПМТФ. – 1992. – №4. – С. 84-89.
2. Лотфуллин М.В., Стурова И.В., Филиппов С.И. *Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости* // Вычислительные технологии. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1994. – Т. 3. – №8. – С. 108-115.
3. Милн-Томсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. – М.: Мир, 1964. – 656 с.
4. Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. – М.: Наука, 1977. – 816 с.

УСИЛЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИГНАЛА В НЕУСТОЙЧИВОМ РЕЗОНАТОРЕ

Н.Д. Черепенин

*Казанский энергетический институт
Казань, 420066, Красносельская, 51*

Рассматривается неустойчивый оптический резонатор, в который каким-то образом (через отверстие связи в зеркале или через его край) вводится когерентный пучок от внешнего источника – стабильного лазера. Такие резонаторы применяются в лазерных генераторах с